**Лекція 13**

**Лінійні простори та лінійні підпростори**

**13.1. Поняття лінійного простору**

Множину *V* називають *лінійним* або *векторним простором*, якщо:

1. є правило, за яким кожним двом елементам ставиться у відповідність третій елемент із *V*, який називають сумой  і  і позначають : ;
2. є правило, за яким кожному елементу  і будь-якому числу  ставиться у відповідність елемент із *V*, який називають добутком елемента  на число  і позначають : .

**Аксіоми лінійного простору:**



**1)** ;

**2)** ;

**3)** ;

**4)**  ;

**5)** ;

**6)** ;

**7)** ;

**8)** .

Елементи лінійного простору називають **векторами** незалежно від їх природи, вектор  називають **нуль-вектором**, а вектор ― **протилежним** до вектора .

**Властивості лінійних просторів**

Наслідки з аксіом 1) – 8)

1. Існує тільки один нульовий вектор.
2. Існує тільки один протилежний вектор.
3.  рівняння  має єдиний розв’язок .
4. .
5. .

Для того, щоб з’ясувати чи є деяка множина лінійним простором відносно запроваджених на ній операцій  і , необхідно перевірити виконання аксіом.

Лінійними є:

1. множина що містить лише нуль-вектор;
2. множина дійсних чисел;
3. множина *n-*вимірних векторів;
4. множина всіх геометричних векторів в просторі з початком в заданій точці і паралельних заданій площині;
5. множина всіх матриць , елементами яких є дійсні числа.
   1. **Базис лінійного простору**

**Базисом** *n―* вимірного простору  називають будь-яку лінійно незалежну систему векторів  цього простору і позначають .

Базисом скінченної системи векторів називають не порожню лінійно незалежну її підсистему, через вектори якої виражається кожен вектор цієї системи.

**Теорема 13.1.** Якщо в *n―*вимірному просторі  задан базис , то будь-який вектор  лінійно виражається через базисні вектори єдиним чином.

**Доведення.**

Система векторів  ―лінійно незалежна, а система ―лінійно

залежна, отже  (властивість 5 лінійної залеж-

ності).Доведено.●

Числа  називають **координатами** вектора  в базисі , а вираз  називають **розкладанням вектора**  **по базисних векторах**.

Операції над векторами у вибраному базисі можна замінити операціями

над їх координатами.

**◄Приклад 13.1.** Показати, що в  система векторів  утворює базис і знайти в цьому базисі координати вектора .

**Розв’язання.**

Покажемо, що вектори  є лінійно незалежними. Складемо матрицю з координат векторів і знайдемо її ранг:

;  - матриця невироджена. Стовпці є лінійно незалежними, що означає лінійну незалежність системи векторів. Тоді, розв’язавши матричне рівняння , або систему

, знаходимо . Це і будуть координати вектора  в новому базисі.►

◄**Приклад 13.2.** Знайти координати многочлена  в базисі .

**Розв’язання.** .

Координати  многочлена  дорівнюють .►

* 1. **Розмірність лінійного простору**

Лінійний простір називають *n―* вимірним, якщо виконуються наступні **аксіоми**:

**9)** існують системи з *n* лінійно незалежних векторів, ;

**10)** будь-яка система з (*n+*1) вектора є лінійно залежною.

Число *n* називають **розмірністю** простору і позначають .

Ранг будь-якої системи векторів в *n―* вимірному просторі не перевищує *n*.

**◄Приклад 13.3.** Задано однорідну систему лінійних рівнянь:

, множина розв’язків якої утворює лінійний простір. Знайти розмірність цього простору і будь-який базис в ньому.

**Розв’язання.**

Розв’яжемо систему методом Гауса – Жордано: .

Ранг системи дорівнює 2, вільними змінними можемо вважати , а базисними будуть . . Це фундаментальна система розв’язків системи. Згідно теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь система векторів  і  є лінійно незалежною, а будь-який інший розв’язок може бути представлений у вигляді лінійної комбінації цих векторів. Вектори  утворюють базис в лінійному просторі розв’язків системи, що розглядається. Розмірність цього лінійного простору дорівнює 2 – кількості векторів в базисі.►

**13.4. Лінійний підпростір**

**Підпростором** лінійного простору *V* називають множину ,

яка задовольняє умови:

1. якщо , то і ;
2. якщо , то і .

Нехай . Вектор виду



називається **лінійною комбінацією векторів**  з коефіцієнтами .

**Властивості підпросторів:**

1. якщо  ―елементи підпростору , то і будь-яка лінійна комбінація цих векторів буде елементом підпростору ;
2. підпростір  є лінійним простором.

**◄Приклад 13.4.** Довести, що в лінійному просторі  вільних векторів тривимірного простору лінійні підпростори утворюють: а) всі вектори, що паралельні заданій площині; б) всі вектори, що паралельні заданій прямій.

**Розв’язання.**

а) Перше твердження випливає з означення суми вільних векторів: вектори ,  і  - компланарні. Тому, якщо , паралельні деякій площині, то і  буде паралельний цій площині. Якщо деякий вектор  помножити на число , то отримаємо вектор, що компланарний заданому і знову отримаємо вектор, що буде паралельний заданій площині.

Аналогічні міркування стосуються і випадку б).►

◄**Приклад 13.5.** В лінійному просторі всіх функцій, що неперервні на відрізку  знайти і описати можливі лінійні підпростори.

**Розв’язання.** Можна виділити наступні лінійні підпростори: а) множину функцій, неперервних на  і неперервно диференційованих в інтервалі ; б) множину всіх многочленів. Зауважимо, що множина всіх монотонних функцій, що неперервні на  є підмножиною множини  але неє лінійним підпростором, оскільки сума двох монотонних функцій може не бути монотонною.►

**◄Приклад 13.6.** Всі вектори з , у яких перша та остання координати співпадають , утворюють лінійний підпростір в . Знайти його базис і розмірність.

**Розв’язання**. Нехай множина ― заданий підпростір. Розглянемо систему векторів . Зауважимо, що . Крім того, це повна система векторів в *М*: дійсно  тільки при . Тоді .

Отже, система векторів  може бути базисом в *М*, ..►

* 1. **Перетворення координат вектора при заміні базиса**

В лінійному просторі всі базиси рівноправні. Іноді зручно використовувати для представлення елементів лінійного простору декілька базисів. В цьому випадку виникає задача перетворення координат векторів, що пов’язане із зміною базиса.

Нехай в *n*-вимірному просторі *L* задано два базиси: старий  і новий . Будь-який вектор можна розкласти за базисом . Тобто, кожен вектор з базису  можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів базису :

.

Або в матричному вигляді: , або, для всіх векторів: , де . Матрицю *U* називають **матрицею переходу** від старого базису  до нового базису . Згідно даному визначенню, *i*-ий стовпчик матриці переходу є стовпчик координат *i*-ого вектора нового базису в старому. Тому кажуть, що матриця переходу складається з координат векторів нового базису в старому, **що записані стовпчиками**.

**Властивості матриці переходу**

1. Матриця переходу невироджена і завжди має обернену матрицю.
2. Якщо в *n*-вимірному просторі *L* задано базис , то для будь-якої невиродженої квадратної матриці *U* існує такий базис  в цьому ліній-ному просторі, що *U* буде матрицею переходу від базису  до базису .

**◄Приклад 13.7**. Нехай  - базис лінійного простору. Тоді система векторів  також є базисом в цьому лінійному просторі: .►

1. Якщо *U* – матриця переходу від старого базиса до нового, то  - матриця переходу від нового базису до старого.
2. Якщо в лінійному просторі задано базиси , причому *U* – матриця переходу від базиса  до базису , а *V* – матриця переходу від базиса  до базиса , то добуток цих матриць *UV* – матриця переходу від базиса  до базиса .

Дослідимо, як перетворюються координати довільного вектора в лінійному просторі при переході від старого базиса до нового. Виберемо довільний вектор . Його розкладання за старим базисом:  або . Розклад того самого вектора в новому базисі матиме вигляд:  або . Знайдемо зв’язок між старими та новими координатами вектора: .  і .

Згідно теореми про єдиність розкладання вектора за даним базисом, маємо:  або . Отже, щоб отримати координати вектора в старому базисі, необхідно стовбець координат цього вектора в новому базисі помножити зліва на матрицю переходу від старого базиса до нового.

**◄Приклад 13.8.** На площині задано ортонормований базис . Новий базис отриманий поворотом старого базиса на заданий кут . Знайти координати векторів  нового базиса відносно старого.

**Розв’язання**. . Матриця переходу матиме вигляд:  і .

Знайдені матриці дозволяють записати співвідношення між старими  та новими  координатами довільного вектора площини:

.►

**13.6. Розмірність лінійного підпростору**

Лінійний підпростір має розмірність та базис.

**Теорема 13.2.** Якщо  - лінійний підпростір лінійного простору , то . Якщо до того ж , то .

**Доведення**. Будь-який базис лінійного підпростору  є лінійно незалежною системою векторів у лінійному просторі . Якщо цей базис в  є базисом і в , то  і зрозуміло, що в цьому випадку . Якщо базис в  не є базисом в , то існує такий вектор , який не є лінійною комбінацією векторів цього базиса. В цьому випадку лінійний підпростір не може співпадати із простором . Додамо вектор  до векторів базису в . Це означає, що в  знайдено більше лінійно незалежних векторів, ніж . З цього випливає, що .●

З теореми випливає, що будь-який базис лінійного підпростору  в лінійному просторі  можна розширити, додавши вектор так, що розширена система векторів залишається лінійно незалежною. Отже, будь-який базис власного лінійного підпростору можна розширити до базиса лінійного простору додаванням нових векторів.

**◄Приклад 13.9.** Нехай задано вектори системи: . Знайти ранг системи векторів.

**Розв’язання.** Складемо відповідну матрицю: . Ранг цієї матриці дорівнює 2 (за методом Гаусса-Жордано). Отже, ранг системи векторів дорівнює 2. Базисом системи будуть будь-які два вектори, наприклад . За цим базисом можна розкласти решту векторів, наприклад, .►

* 1. **Афінні, евклідові та арифметичні простори**

Множину *А*, що складається з елементів двох типів ― точок і векторів *n―*вимірного лінійного простору , називають ***n―*вимірним афінним простором**, якщо:

- є правило, за яким кожній впорядкованій парі точок  ставиться у відповідність вектор із , який називають **вектором з початком в точці  і кінцем у точці ** і позначають ;

- і виконані аксіоми: ()

**11)** існує єдина точка ;

**12) **.

Операцію відшукання точки  називають **відкладанням вектора**  від точки .

**Наслідки з аксіом 11) і 12):**

1) ;

2) .

Числову функцію (форму), що залежить від двох векторів ,

називають **скалярним добутком векторів** і позначають , якщо

вона задовольняє аксіомам:

**13)** ;

**14) **;

**15) **;

**16) **;

**17) **.

Лінійний простір , в якому задано скалярний добуток, називають е**вклідовим** і позначають **.**

Лінійний простір *n―*вимірних векторів називають ***n―*вимірним арифметичним лінійним простором** і позначають .

*n ―* вимірним вектором називають набір чисел .

Множиину всіх *n―*вимірних векторів з дійсними компонентами позначають .

В лінійному просторі узагальненням поняття довжини вільного вектора є

**норма.** Довжину вектора в лінійному просторі  або  можна розглядати як функцію яка кожному вектору ставить у відповідність число – його довжину. Ця функція має характерні властивості, які служать основою для визначення норми в лінійному просторі. Норму вектора в лінійному просторі іноді називають довжиною, маючи на увазі зв’язок з аналогічним терміном векторної алгебри.

**Функцію**, що задана в лінійному просторі , яка кожному вектору 

ставить у відповідність дійсне число , **називають нормой**, якщо вона

задовольняє наступні аксіоми:

1. , причому рівність  можлива лише при ;
2. ;
3.  (нерівність трикутника).

Лінійний простір, в якому задана норма, називають **нормованим простором.**

Евклідові простори і нормовані простори є прикладами лінійних просторів із додатковими структурами: скалярним множенням і нормой відповідно.

**13.6. Ортогональні системи векторів**

Два вектори в евклідовому просторі називають **ортогональними**, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Ортогональність позначатимемо так : . Зауважимо, що нуль – вектор ортогональний будь-якому вектору.

Кажуть, що вектор  в евклідовому просторі  **ортогональний підпростору **, якщо він ортогональний кожному вектору цього підпростору.

В просторі  ненульовим ортогональним векторам  та  можна поставити у відповідність катети прямокутного трикутника, до того ж так, що їх сумі, побудованій за правилом трикутника, буде відповідати гіпотенуза цього трикутника (рис.13.1)

*y*

*x*

*x+y*

Рис. 13.1.

За аналогією з  назвемо в евклідовому просторі суму  ортогональних векторів гіпотенузою трикутника, побудованого на  та . Тоді на довільний евклідів простір розповсюджується відома теорема Піфагора.

**Теорема 13.2.** Якщо вектори евклідового простору  та  ортогональні, то

.

**Доведення.**  Під нормою будемо розуміти евклідову норму. Виразимо ліву частину рівності через скалярний добуток і скористаємося умовою ортогональності:  ●

Систему векторів евклідового простору називають **ортогональною**, якщо будь-які два вектори цієї системи ортогональні.

**Теорема 13.3.** Будь-яка ортогональна система ненульових векторів лінійно незалежна.

**Доведення.** Розглянемо довільну ортогональну систему ненульових

векторів . Припустимо, що для деяких дійсних коефіцієнтів  виконується рівність: . Помножимо цю рівність скалярно на будь-який вектор :. Права частина отриманої рівності дорівнює нулю, тоді, перетворюючи ліву частину, маємо: . Всі доданки, крім одного, рівні нулю, оскільки система векторів є ортогональною. Тоді, . Оскільки вектор  ненульовий, то слідує, що . Індекс  обирався довільно і це означає, що всі . Отже, система векторів  лінійно незалежна.

**◄Приклад 13.10.** З’ясувати, чи буде ортогональною система векторів евклідового простору :

1) ;

2) .

**Розв’язання.**

Система векторів ортогональна, якщо її вектори попарно ортогональні.

1)  - система ортогональна.

2)  - система не ортогональна. ►

**13.7. Ортогональні та ортонормовані базиси**

Якщо базис  є ортогональною системою векторів, то цей базис називають **ортогональним**. В евклідовому просторі серед усіх базисів можна виділити ортогональні та ортонормовані базиси, які більш зручні і відіграють в лінійній алгебрі важливу роль, аналогічну прямокутній декартовій системі координат в аналітичній геометрії.

Ортогональний базис називають **ортонормованим**, якщо кожен вектор цього базису має норму, що дорівнює 1.

Будь-який ортогональний базис можна зробити ортонормованим множенням кожного вектора на відповідний нормуючий множник.

**◄Приклад 13.11.** Задано систему з трьох векторів: ; ;  в евклідовому арифметичному просторі . Довести, що цей базис є ортогональним і створити з нього ортонормований.

**Розв’язання.**

Перевіримо умови ортонональності: ;

; . Отже, базис ортогональний. Нормуємо його: ; ; . Ортонормованим буде базис, що складений з векторів: ; ; .►

**2.8. Обчислення в ортонормованому базисі**

Використання ортонормованих базисів полегшує обчислення скалярного добутку за координатами векторів. Нехай в евклідовому просторі  задано деякий базис . Розглянемо два довільних вектори в цьому просторі:  і . Запишемо ці

розклади за базисом в матричному вигляді:

.

Скалярний добуток векторів можна виразити через скалярні добутки векторів базиса: .

Складемо зі скалярних добутків базисних векторів квадратну матрицю . Тоді скалярний добуток можна записати у вигляді . Матриця  є симетричною в силу комутативності скалярного добутку. Цю матрицю називають **матрицею Грама** системи векторів .

Нехай базис  є ортонормованим. Тоді скалярний добуток  при , а . Це означає, що для ортонормованих базисів матриця Грама є одиничною. Тому .

В ортонормованому базисі норма вектора , яка виражається через скалярний квадрат цього вектора, може бути обчислена за формулою:

.

Косинус кута між ненульовими векторами  та :

.

В ортонормованому базисі також спрощується обчислення координат вектора: .

**◄Приклад 13.11.** Обчислити матрицю Грама для системи векторів

, якщо скалярний добуток  задається за таким правилом:

1) ;

2) ;

3) .

**Розв’язання.**

1) . Отже,

.

2) 

.

3) 

.►